

ECLIPSIS

T. CADEFÀU SURROCA¹; M.A. CATALÀ POCH²; F. DACHS CADEFÀU³

¹IES Pere Borrell, Puigcerdà

²Departament d'Astronomia i Meteorologia, Universitat de Barcelona

³Estudiant de la llicenciatura de Matemàtiques FME (UPC)

Paraules clau: *eclipsis, sistema solar: Sol, Terra i Lluna*

Eclipses

Summary: The eclipses of Sun, the annular one of year 2005, and the total of year 2006, have contributed directly to increase the interest for these phenomena. We present a form of calculation of the degree of darkness or darkening and of the magnitude of the eclipse, which although being based with the flat geometry allows us to know these values with quite a lot of accuracy. This activity is addressed to pupils from 15 to 17 years old.

Key words: *eclipses, solar system: Sun, Earth and Moon*

Introducció

A l'IES Pere Borrell de Puigcerdà, igual que en d'altres centres, l'eclipsi anular del 3 d'octubre de 2005, que vam veure com a parcial, es va observar amb expectació. Durant el matí es van anar intercalant els núvols i les clarianes, tot i així es va poder seguir. Es va observar per projecció, amb ulleres específiques per a l'eclipsi, a través d'un filtre de soldador del número 18... També es van enregistrar els valors de lluminositat i de temperatura i posteriorment es compararen els seus gràfics amb els enregistrats l'endemà. Per altra part, l'alumne Ferran Dachs amb l'ajuda d'un company, Adrià Martínez, va aconseguir fotografiar l'eclipsi. Amb les imatges obtingudes determinà amb força aproximació la magnitud de l'eclipsi i l'enfosquiment.

Pretenem aquí donar un apunt sobre els eclipsis com a pas previ per presentar aquest mètode de càlcul, i acabarem amb una proposta que pot venir a completar algun dels aspectes curiosos de la geometria dels eclipsis.

Apunts sobre eclipsis (J. J. de Orús Navarro i M. A. Català Poch, 1986-1987) (De Orús Navarro et al., 2007)

El terme *eclipsi* significa un enfosquiment de la llum d'un astre o un cos celeste per un altre. Així un eclipsi de Sol per la Lluna rep el nom d'*eclipsi de Sol*. Un eclipsi de Sol per un planeta inferior s'anomena *pas del planeta* per davant del Sol. Un *eclipsi de Lluna* és un eclipsi de Lluna per la Terra. I una *ocultació d'una estrella o planeta* és un eclipsi de l'estrella o planeta per la Lluna.

El moviment anual del Sol en l'esfera celeste és aparent i degut al moviment de translació de la Terra. Així, si la Terra descriu una el·lipse al voltant del Sol i aquest ocupa un dels seus dos focus, el moviment aparent del Sol des de la Terra també serà una el·lipse on la Terra ocuparà un dels focus. Anomenem pla de l'eclíptica el pla que ens determina aquest moviment. En realitat el Sol no descriu una el·lipse, sinó que es desplaça segons una línia sinuosa i el seu valor mitjà és l'eclíptica, la causa d'això rau en el fet que no és la Terra la que descriu una el·lipse, sinó el centre de gravetat Terra-Lluna, i aquest moviment està pertorbat per la resta de planetes.

L'òrbita de la Lluna al voltant de la Terra és aproximadament el·líptica, el seu moviment està pertorbat pel Sol; els valors de l'excentricitat varien de 0,044 a 0,067 i la inclinació, entre 4°58' i 5°19', mentre que el semieix gran de valor mitjà 384.400 km gira en el sentit directe amb un període de 8 anys i 310 dies. La intersecció de l'òrbita lunar amb el pla de l'eclíptica determina la línia dels nodes. Anomenem node ascendent el punt pel qual la Lluna passa de l'hemisferi celeste sud a l'hemisferi celeste nord; l'altre punt serà el node descendent. El *mes draconític* és el temps transcorregut entre dos passos consecutius de la Lluna pel node ascendent de l'òrbita, el valor admès és de 27,212218 dies. Per altra part, el moviment aparent de la Lluna respecte de les estrelles ve acompanyat per una variació del seu aspecte, són les fases de la Lluna (Lluna nova, quart creixent, Lluna plena i quart minvant), ja que és un cos opac i la seva posició respecte del Sol en el seu moviment de translació varia. El *mes sinòdic, llunació o mes lunar* és l'interval mitjà entre dues conjuncions successives de la Lluna i el Sol o llunes noves. El seu valor es calcula a partir d'èpoques en què s'ha produït un eclipsi de Sol separades per temps molt llargs, el seu valor és de 29,5305883 dies.

Només es produirà un eclipsi quan la Lluna sigui propera a la recta determinada pels centres del Sol i de la Terra, ja que a causa de les seves dimensions no cal que els tres astres estiguin totalment alineats, és a dir la Lluna ha d'estar propera al node i en oposició o conjunció, en una *sizígia*. En Lluna nova o quasi podem tenir eclipsi de Sol, de la mateixa manera que en Lluna plena o quasi podem tenir eclipsi de Lluna, però no té perquè haver-hi eclipsi en cada sizígia, ja que l'òrbita de la Lluna està inclinada. Per tant, és evident que el fet que es produeixi un eclipsi dependrà directament de la periodicitat del mes sinòdic, del mes draconític i de l'interval de temps transcorregut entre dos passos consecutius del Sol pel node, que és de 346,62 dies i l'anomenem *any eclipsi*. El mes draconític ens limita el temps mínim entre dos eclipsis, un de Sol i l'altre de Lluna, o a l'inrevés, en 13,6 dies, i l'any eclipsi donaria una separació de 173 dies entre dues zones d'eclipsis.

Per altra part no oblidem que les òrbites de la Terra al voltant del Sol i de la Lluna al voltant de la Terra són el·líptiques i per tant la distància relativa entre els tres astres varia i com a conseqüència també canviarà la grandària aparent del Sol i de la Lluna.

Observem que 223 revolucions sinòdiques o llunacions són aproximadament 242 revolucions draconítiques, que corresponen a 19 anys eclipsi; aquest període de 18 anys, 11 dies i 8 hores l'anomenem *període Saros* o període en què es reproduiran els eclipsis quasi en idèntiques condicions, encara que serà en un lloc situat a uns 120°; és a dir, perquè es produeixin a la mateixa zona hauran de passar 54 anys i 34 dies, i tot i així encara estaria desplaçada cap al nord o cap al sud.

Els eclipsis de Sol o solars poden ser:

- *Eclipsi parcial*, quan la Lluna no està del tot alineada amb la Terra i el Sol, i no arriba a cobrir-lo totalment. En aquest cas l'ombra de la Lluna no arriba a tocar cap lloc de la superfície terrestre.
- *Eclipsi anular*, quan la Lluna està totalment alineada amb la Terra i el Sol, però la seva ombra no és prou llarga per arribar a tocar la superfície de la Terra, serà l'antiombra la que la tocarà. En aquest cas la Lluna tapa la part central del disc solar.
- *Eclipsi total*, quan la Lluna està més propera a la Terra i la seva ombra i penombra es projecten sobre la superfície terrestre.
- *Eclipsi híbrid o mixt (anular-total)*, quan l'extrem de l'ombra coincideix amb un lloc de la Terra.

Si es tenen en compte els semidiàmetres aparents del Sol i de la Lluna, i la paral·laxi horitzontal dels dos astres, en el moment de la conjunció del Sol i la Lluna la condició perquè hi hagi eclipsi és que la latitud de la Lluna sigui inferior a $1^{\circ}24'36''$, no serà possible si és superior a $1^{\circ}34'46''$ i serà dubtós si es troba entre els dos límits.

Un dels objectius de la teoria d'eclipsis és trobar les circumstàncies perquè es produeixi un eclipsi en un lloc determinat de la Terra, evidentment és una cosa complexa i es basa en què durant un eclipsi de Sol la Lluna projecta dos cons d'ombra: un de tangent exterior a la superfície de la Lluna i el Sol, o con d'ombra, i un altre tangent interior, o con de penombra. L'eix d'aquests cons l'anomenem *l'eix d'ombra*; aleshores, en un lloc de la Terra hi haurà eclipsi total o parcial si la distància d'aquest lloc a l'eix d'ombra és menor que el radi del con d'ombra o penombra corresponent a aquest lloc.

Les circumstàncies d'un eclipsi per a un lloc determinat són: principi i fi de l'eclipsi, màxima fase de l'eclipsi, angle de posició dels punts de contacte, enfosquiment i magnitud de l'eclipsi.

En els anuaris amb els elements dels eclipsis de Sol, s'inclouen mapes a partir dels quals es poden deduir els valors aproximats de les circumstàncies per a un lloc determinat. Per fer-nos càrrec de la forma de l'ombra o la penombra de l'eclipsi dibuixades en aquests mapes, només ens cal considerar que, del con d'ombra o penombra podem treure una secció circular, o el·líptica, o parabòlica, només variant el pla d'inclinació, que equivaldria a la projecció de l'ombra o la penombra sobre la superfície de la Terra, i a la qual només caldria afegir o incorporar el moviment relatiu del Sol i la Lluna.

Eclipsis de Lluna

El càlcul d'un eclipsi de Lluna és similar al d'un eclipsi de Sol, encara que en aquest les circumstàncies i els temps seran els mateixos per a tots els llocs en els quals la Lluna es veu. Diferenciem: eclipsi penombral, quan la Lluna entra en la penombra de la Terra; eclipsi parcial, quan la Lluna està inclosa parcialment en el con d'ombra, i eclipsi total, quan la Lluna entra plenament dins el con d'ombra.

Si suposem la Terra esfèrica de radi el corresponent a un lloc de latitud 45° , i tenim en compte la paral·laxi de la Lluna per a aquesta latitud, en l'oposició, hi haurà possibilitat d'eclipsi per a latituds del centre de la Lluna inferiors a $1^{\circ}36'38''$; i per a latituds inferiors a $0^{\circ}23'48''$ podrem assegurar que hi haurà eclipsi total.

Per calcular les circumstàncies d'un eclipsi de Lluna es poden utilitzar les equacions de l'eclipsi de Sol intercanviant els valors de la Terra pels de la Lluna. En aquest cas també parlarem de màxima fase de l'eclipsi, magnitud de l'eclipsi, grau de foscor i angle de posició del punt de contacte.



Fig. 1. Eclipsi solar del 3 d'octubre de 2005 a Puigcerdà (autor: F. Dachs).

Una peculiaritat dels eclipsis de Lluna és que aquesta no es torna invisible, ja que els raigs de Sol quan entren a l'atmosfera terrestre es desvien per efecte de la refracció, primer apropant-se a la vertical i després separant-se'n, i això fa que en un eclipsi total de Lluna aquesta quedi il·luminada pels raigs de llum que hauran travessat l'atmosfera i apareix de color rogenc-ataronjat.

L'eclipsi anular del 3 d'octubre de 2005

En aquest apartat es presenta un mètode per calcular la magnitud i el grau de foscor de l'eclipsi utilitzant fotografies fetes del mateix eclipsi i la geometria plana. Com a cas pràctic està calculat per a Puigcerdà (latitud: 42° 26' longitud: 1° 56'E) en l'eclipsi anular del 3 d'octubre de 2005.

L'Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando (Cadis), en la seva web, informava de les circumstàncies locals a Espanya de l'eclipsi anular de Sol del 3 d'octubre de 2005. Les dades per a Puigcerdà eren: principi de l'eclipsi a les 7 h 43 min 55,9 s TU, o temps universal (el temps oficial era per aquell dia les 9 h 43 min 55,9 s); el màxim eclipsat es produiria a les 9 h 3 min 4,5 s TU, la magnitud de 0,862 i el tant per cent eclipsat del 80,8 %; i finalitzaria a les 10 h 29 min 18,5 s TU.

Les circumstàncies eren excepcionals i en Ferran Dachs, llavors alumne de 2n de batxillerat, i com a aplicació del treball de recerca «Les còniques», ja que l'eclipsi no deixava de ser la intersecció de dos cercles, es va proposar calcular la magnitud de l'eclipsi i l'enfosquiment. Li calia obtenir una bona fotografia de l'eclipsi, i per fer-ho comptava amb la seva càmera digital i un filtre de soldador del número 11. La fotografia adjunta, figura 1, està presa a les 11:02:58 Temps Oficial (09:02:58 TU) del dia 3 d'octubre de 2005 amb un temps d'exposició de 1/20s, una sensibilitat ISO de 64, una obertura de diafragma de 3,8, zoom de 40 augments i una resolució de 4 megapíxels forçada per obtenir una resolució de 3.200 x 2.400 píxels.

Càlcul de la magnitud de l'eclipsi i l'enfosquiment

Per calcular la magnitud i l'enfosquiment de l'eclipsi és necessari, en primer lloc, determinar en la fotografia el diàmetre del disc del Sol i de la Lluna. El mètode de càlcul és una simple aplicació del teorema de Pitàgores, tal com es mostra a la figura 2. Amb l'ajut de paper vegetal per no malmetre la

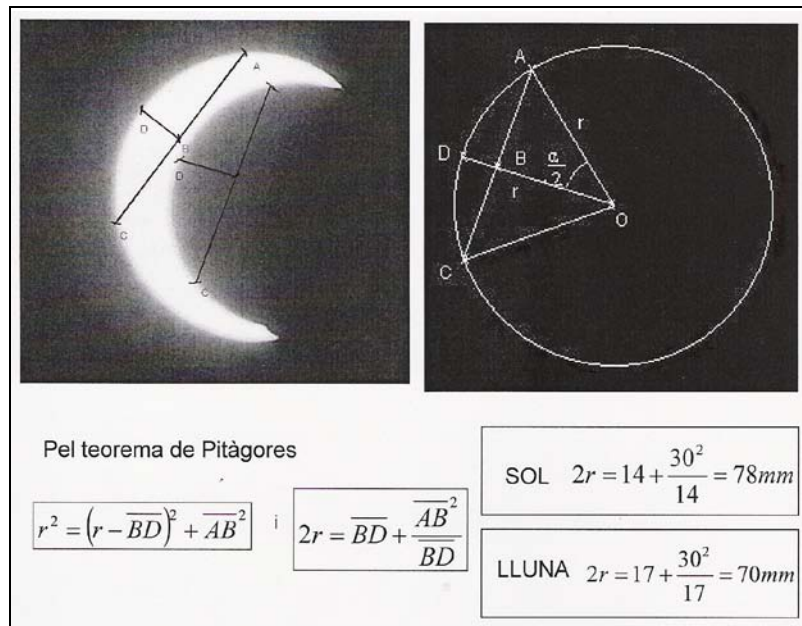


Fig. 2. Càlcul del radi.

fotografia, determinà per al Sol i sobre la fotografia original les longituds de 30 mm entre A i B, i de 14 mm entre B i D, que donen un valor del diàmetre del disc solar de 78 mm; de la mateixa manera determinà el diàmetre de la Lluna en 70 mm.

La magnitud de l'eclipsi, M , és defineix com la proporció de diàmetre amagat en el moment de màxima fase, és a dir:

$$M = \frac{2r - d}{2r} \quad (1)$$

on: $2r$ és en el nostre cas el diàmetre del Sol, i d és la distància màxima en direcció radial no eclipsada, vegeu la figura 3, que mesurada sobre la fotografia original és de 16 mm.

El valor així trobat per la magnitud de l'eclipsi resultà ser de 0,79, un valor proper al previst per l'Observatori de San Fernando (0,862).

El percentatge eclipsat o enfosquiment és la proporció d'àrea eclipsada. En primer lloc es va calcular l'àrea eclipsada, vegeu figura 3, per la qual va determinar la següent expressió:

$$S_E = S_S + A_{II} - S_{II} \quad (2)$$

on: S_S és l'àrea del segment circular del Sol determinat pels punts d'intersecció del contorn del disc solar i el contorn del disc lunar. S_{II} és l'àrea del segment circular de la Lluna determinat pels punts d'intersecció del contorn del disc solar i el contorn del disc lunar; i A_{II} és l'àrea del disc de la Lluna, que vindrà donada per: $A_{II} = \pi \cdot r^2$, i on r és el radi.

(Observem que si la magnitud fos inferior o igual a 0,50 seria: $S_E = S_S + S_{II}$)

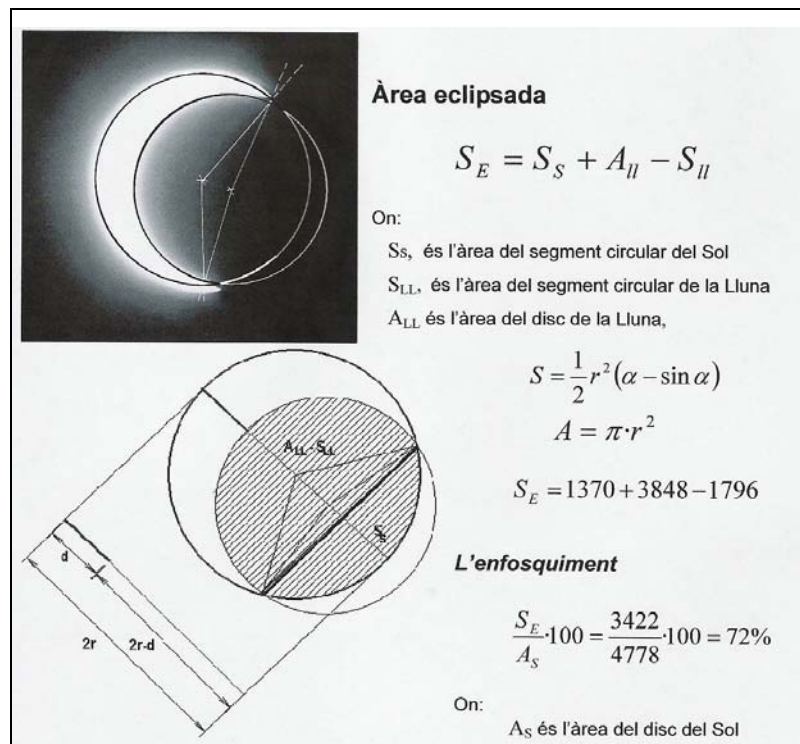


Fig. 3. Càlcul de l'engepinament.

L'àrea del segment circular, vegeu figura 2, és la diferència entre l'àrea del sector circular d'angle α mesurat en radians i l'àrea del triangle ΔOAC , així:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha) \quad (3)$$

L'àrea del segment circular del Sol val 1.370 mm^2 perquè el radi del disc solar és de 39 mm i l'angle del sector circular és de 140° , o equivalentment $2,443$ radians, un angle que es va mesurar directament sobre la fotografia amb un transportador. I per la Lluna l'àrea del segment circular val 1.796 mm^2 , ja que el radi del disc lunar és de 35 mm i l'angle del sector circular és de 174° , o equivalentment $3,037$ radians. Per altra part, l'àrea del disc de la Lluna és de 3.848 mm^2 , i consegüentment la superfície total eclipsada és de 3.422 mm^2 . Tenint en compte que la superfície del disc solar és de 4.778 mm^2 , l'engepinament trobat és del 72% . Un valor també lleugerament inferior al previst per l'Observatori de San Fernando ($80,8\%$).

Aquests valors de la magnitud ($0,79$) i de l'engepinament (72%) de l'eclipsi els considerem prou aproximats (errors del 8% i de l' 11% respectivament, vist el mètode de càlcul, ja que: no s'ha tingut en compte l'esfericitat de la Lluna i el Sol; els dos discs (solar i lunar) s'han suposat cercles perfectes, i tampoc no es va considerar en limitar els dos discs la difusió i la difracció de la llum que fa que el disc solar sembli més gran.

	Distància Terra-Sol (km)	Grandària aparent Sol (')			Distància Terra-Lluna (km)	Grandària aparent Lluna (')	Angle con ombra (')	Llargada con ombra (km)
Terra periheli	147.097.192	32'31"91	excentricitat 0,044	Lluna perigeu	367.486	32'35"99	32,31"90	367.320
				Lluna apogeu	401.314	29'50"74	32'32"32	367.236
			Excentricitat 0,067	Lluna perigeu	358.645	33'24"32	32'31"78	367.342
				Lluna apogeu	410.155	29'12"05	32'32"47	364.213
Terra afeli	152.102.808	31'27"67	excentricitat 0,044	Lluna perigeu	367.486	32'35"99	31'27"51	379.851
				Lluna apogeu	401.314	29'50"74	31'27"93	379.766
			Excentricitat 0,067	Lluna perigeu	358.645	33'24"32	31'27"40	379.873
				Lluna apogeu	410.155	29'12"05	31'28"04	379.744

Taula 1. Grandàries aparents o diàmetres aparents del Sol i la Lluna, i angle d'obertura i llargada del con d'ombra.

Curiositats dels eclipsis, o propostes que vindrien a completar algun dels aspectes curiosos de la geometria dels eclipsis

Càlcul de la longitud del con d'ombra i les grandàries aparents del Sol i de la Lluna en els eclipsis de Sol

A part que els tres astres, Sol, Terra i Lluna, estiguin alineats o quasi, la possibilitat d'eclipsi i el seu tipus ve condicionat per la distància relativa entre els tres astres i la grandària aparent ($\alpha = 2 \cdot \arctan R / (d - R \cdot (1 - \cos 45^\circ))$) del Sol i de la Lluna. A partir de la distància mitjana entre el Sol i la Terra, i entre la Terra i la Lluna, i de les excentricitats de les respectives òrbites es calcula entre quins valors poden variar les distàncies relatives dels tres astres i així es pot saber si l'ombra projectada per la Lluna pot arribar o no a la superfície de la Terra. En cada cas, tenint en compte la grandària aparent del Sol i de la Lluna sabrem fins a quin punt el disc solar pot ser o no cobert pel disc lunar, i així podrem entreveure el tipus d'eclipsi que es podria observar. Els resultats que s'obtenen es recullen a la taula 1.

Cas particular: càlcul de la llargada i l'angle del con d'ombra d'un eclipsi determinat

Actualment, si no es disposa d'un anuari, internet ofereix la possibilitat de conèixer les efemèrides del Sol i de la Lluna. Així és possible calcular l'angle d'obertura ($\beta = 2 \cdot \arctan (R_S -$

R_{LL}/d_{TS}) i la longitud del con d'ombra ($L = R_{LL}/\tan\beta/2$) en un eclipsi, i per tant deduir-ne les circumstàncies i el tipus.

Per exemple: per l'eclipsi del 3 d'octubre de 2005: F. Espenak (Eспенak, 1999) ens dona les següents efemèrides: diàmetre aparent del Sol 1.918,1"; distància de la Terra al Sol, 1,000639 UA (és a dir, 149.695.594 km); diàmetre aparent de la Lluna, 1.804,4"; distància de la Lluna a la Terra, 397.400 km; es pot calcular l'angle d'obertura del con d'ombra, el qual resulta ser de 1.910,23", i la longitud del con d'ombra, de 375.332 km. Amb aquests resultats observem que la longitud del con d'ombra és menor que la distància de la Terra a la Lluna, i l'angle d'obertura del con d'ombra és una mica inferior a la grandària aparent del Sol i superior a la de la Lluna; per tant, tindrem la següent situació: a la Terra hi arriba el con d'antiombra i la Lluna no arriba a tapar el Sol, llavors serà un eclipsi anular.

Deduir la trajectòria de l'ombra en un eclipsi de Lluna

Si disposem de diverses fotografies de l'eclipsi, només cal determinar el centre del disc lunar i la dels discs d'ombra i observar com canvia la posició relativa entre els dos centres. Per determinar amb més cura el centre del disc de l'ombra va bé forçar el temps d'exposició de les fotografies.

Càlcul de la desviació mínima que pateix un raig de llum, a fi que en un eclipsi total la Lluna es vegi rogenca

En un eclipsi total de Lluna, aquesta no es torna invisible, sinó que té una aparença rogenca perquè queda il·luminada per alguns raigs de Sol que s'han desviat per efecte de la refracció en l'atmosfera terrestre. Es pot calcular la desviació mínima necessària soferta per aquests raigs calculant la distància geocèntrica del vèrtex del con d'ombra i comparant el seu valor amb la distància entre la Terra i la Lluna.

Representació gràfica dels eclipsis dels últims anys en funció de la data en què s'han produït

Es pot fer una valoració del nombre d'eclipsis durant l'any utilitzant la informació que podem trobar a Internet (Eспенak & Meeus, 2008; Espenak & Meeus, 2009). L'activitat consistiria a representar gràficament els eclipsis ocorreguts per any en funció de la data, queda així evidenciada la seva periodicitat.

Trobar el nombre d'eclipsis màxim i mínim que hi pot haver durant un any

Deduir el nombre mínim i màxim d'eclipsis per any estadísticament, amb el gràfic anterior, o tenint en compte les condicions i característiques que s'han de complir perquè hi hagi eclipsi. Així, per una banda sabem que moltes vegades els eclipsis de Sol i de Lluna vénen aparellats, un de Sol seguit d'un de Lluna o a l'inrevés, serien al voltant d'un mateix node i separats uns 13,6 dies, tenint en compte la durada del mes draconític; com a màxim a cada zona pot haver-n'hi tres. Per altra part, durant l'any civil tenim dues zones d'eclipsi o com a màxim «dues i mitja», ja que l'any eclipsi és de menor durada. És a dir, hi hauria un mínim de quatre eclipsis i un màxim de set per any.

Comprovar si les prediccions d'eclipsi fetes per Jacob ben David Bonjorn, s'han complert

Jacob ben David Bonjorn, astrònom català del segle XIV, elaborà unes taules dedicades a les sizígies i als eclipsis precedides d'uns canons explicatius sobre el seu maneig, i calculades per Perpinyà. Creiem que comprovar alguns dels eclipsis que va preveure, a part de ser curiós, pot ajudar a conèixer-lo i ensenyar-nos com es treballava llavors. Va bé comparar la informació sobre l'eclipsi amb la d'un anuari actual o la pàgina web d'algun observatori.

Per exemple: segons les taules de Bonjorn hi hauria eclipsi de Lluna, visible a Perpinyà, el 29.03.1363, a les 17 h 28 min (o a les 5:28 h del dia julià següent, és a dir 30.03.1363, ja que el dia comença al migdia, i l'any el mes de març), abans de la sortida del Sol (6 h 0 min); l'argument de la latitud de la Lluna és $5s\ 27^{\circ}\ 18'$. De la taula d'eclipsis de Lluna: la part del diàmetre lunar eclipsada és d'uns 13 dits i 2 min (diàmetre solar equival a 12 dits), la semidurada de l'eclipsi és 1 h 37 min, i la semidurada de la totalitat, 22 min.

A les taules de F. Espenak (Eспенak & Meeus, 2008) podem comprovar que el dia 30 de març de 1363 hi va haver un eclipsi total de Lluna, a les 5 h 07 min, de magnitud 1,320; la durada de l'eclipsi fou de 108 minuts, i la durada de la totalitat, 41 minuts.

Bibliografia

ESPENAK, F. (1999), *Twelve Year Planetary Ephemeris: 1995-2006*, NASA (RP1349).

ESPENAK, F.; MEEUS, J. (2008), *Five Millennium Catalog of Solar Eclipses: – 1999 to +3000 (2000 BCE to 3000 CE)*, NASA, TP-2008-214170.

ESPENAK, F.; MEEUS, J. (2009), *Five Millennium Canon of Lunar Eclipses: –1999 to +3000 (2000 BCE to 3000 CE)*, NASA, TP-2009-214172.

ORÚS NAVARRO, J. J. DE; CATALÀ POCH, M. A. (1986-1987), *Apuntes de Astronomía*, Barcelona, Departament de Física de l'Atmosfera, Astronomia i Astrofísica, Universitat de Barcelona, Facultat de Física.

ORÚS NAVARRO, J. J. DE et al. (2007), *Astronomía esférica y mecánica celeste*, Barcelona, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona:
http://www.armada.mde.es/ArmadaPortal/page/Portal/ArmadaEspañola/ciencia_observatorio/03_Efemerides--03_Eclipses#octubre2005